回転ブラックホール・エントロピーの研究における最近の発展

著者	中川 弘一
雑誌名	星薬科大学一般教育論集
号	29
ページ	39-63
発行年	2011
URL	http://id.nii.ac.jp/1240/00000257/

回転ブラックホール・エントロピーの研究における最近の発展

中川　弘一
星薬科大学　物理学研究室

概　要

本稿は，2010 年の弦理論に関する Cargèse 学校において行われた A. Strominger の講義 [1] を基に，最近の Kerr/CFT 対応に関する研究の発展を総括したものである．ここでは [1] に沿って，Kerr ブラックホール解の説明から始め，Kerr/CFT 対応の基本的な結果，動機，未解決問題，将来の方向性に関する内容を扱う．

1　序論

2010 年の弦理論に関する Cargèse 学校において行われた A. Strominger の講義 [1] は回転ブラックホール（Kerr ブラックホール）と Kerr/CFT 対応について非常に詳しく説明しており，今後の Kerr/CFT 対応に関する研究にも大きな影響を及ぼすものである．ここでは，この講義ノートにしたがって，最近の Kerr/CFT 対応に関する研究の結果と将来の展望を総括する．

1970 年代初期，Bekenstein, Hawking, および他の多くの研究者による仕事 [2-8] がブラックホールの性質に関する深刻な難問をいくつか提起した．その難問の一つは，巨視的な議論によりブラックホールのエントロピー S はイベント・ホライズンの面積Aに比例していて，いわゆる Bekenstein-Hawking の公式

$$S = \frac{A}{4\hbar G} \tag{1}$$

で与えられることが分かっていたが，その頃，このエントロピーについての微視的な計算方法は知られていなかった．ブラックホール・エントロピーの微視的状態による記述ができないということは，量子論的に深刻な矛盾を抱えてしまうことになる．

この問題は 20 年以上もの間未解決のままであったが，90 年代の中ごろ，弦理論におけるある特殊なブラックホールに対して，微視的な自由度が正確に計算された [9]．この計算は弦理論の詳細に依存していて，2 やπなどの多くの数因子を含む長いものであったが，なんとか微視的状態数の計算をすることにより，Bekenstein-Hawking の結果 (1) を再現した．その頃, この計算結果の一致が, 弦理論が自然界を記述する正しい理論である事の間接的な証拠を与えるのではないかという議論もされていた．

その 1 年後，AdS_3 因子をもつホライズン近傍領域により特徴づけられた，特殊なブラックホールを含む，ユニタリー性を満たす量子重力理論は，同様の方法でエントロピーを再現しなければならないことが示された [10]．この計算においていは，微視的な紫外領域 (UV) 完全性のような，弦理論の具体的な詳細は必要ではなかった．むしろ，必要になるものは 80 年代に Brown と Henneaux によってなされた解析 [11] であった．その解析法によると，もし，AdS_3 上の無矛盾で，完全な量子重力理論を見つけたとするならば，対称性についての考察により，それは 2D 共形場理論により記述されなければならないということになっていた．このように，2 や π のような数因子の具体的な一致は，実際，弦理論の結果というよりも，弦理論が単に無矛盾な量子重力理論であることから出てくる帰結であり，その他の無矛盾な理論も，その必要性から，同じ方法で同じ結果を再現するはずである．

この後での議論は，弦理論から少なからず情報を得ているが，弦理論が真の自然界の理論であるという仮説や，AdS/CFT 対応の弦理論的な事実には依存していない．むしろ，ここでの議論は，基本的な無矛盾性の仮定を伴う微分同型群の性質に従っているだけで，Planck スケールにおける物理の詳細は全く含んでいない．実際，Bekenstein-Hawking の結果 (1) が，量子重力が UV 領域においてどの程度完全かということの詳細に依存しているとすると，それは非常に

奇妙なことである．

我々が居る銀河の中心にある，直径約 4400 万 km のブラックホール，いて座 A*に，なぜ面積･エントロピー法則 (1) が適用できるのかを理解するために，10^{-38} km のオーダーの領域における弦理論の詳細をすべて知る必要はないはずであり，量子重力がある無矛盾な UV 完全性をもつという仮定だけから (1) を理解できるはずである．

[9] で扱われている，弦理論的な微視的エントロピーの解析は，最初に周期律表を計算しておいて，熱力学の法則を計算するときにそれを使うということに類似してる．この弦理論的なブラックホールの計算では，面積則を得るために必要であった情報よりも多くの情報を得たが，この情報のごく一部だけが普遍的であることが分かった．この普遍的な部分は，Planck スケール・カットオフについての仮定を使わずに，普遍的な意味付けだけを使って理解できることを以下で見てみることにする．

また以下の議論では，多くの普遍的な振る舞いをする，もう一つの対象に遭遇することになる．それが 2D 共形場理論 (CFT) である．我々が知っている 2D CFT に関する性質の多くはある与えられた CFT の詳細には依存しない．実際，以下ではエントロピー公式を超えて，ブラックホールの普遍的な性質が 2D CFT の普遍的な性質と一致することが分かる．

以下の内容は次の通りに構成されている．エクストリーム Kerr ブラックホールのホライズン近傍 (NHEK) の幾何を含む，Kerr ブラックホール解に関するレビューから始め，その後，漸近的対称群，NHEK 幾何に対する境界条件，NHEK における重力の量子論の CFT による記述，およびエクストリームから外れたところにある隠れた共形対称性についての証拠について説明が及ぶ．最後に，未解決問題と将来の方向性についての議論を以て終了する．

2　Kerr ブラックホール解

Einstein は当初，Einstein 方程式の非自明な厳密解は決して閉じた形では見つからないであろうと信じていたようである．これはすぐに Schwarzschild によって否定され，その後 Kerr ブラックホール解が発見されるまでに，さらに 50 年

が経っていた． Kerr 解は，今までに見つかった，現実の物理的な対象を記述する，非線形偏微分方程式の解の中でも，最も複雑な厳密解であることはおそらく間違いないであろう．

Boyer-Lindquist 座標において，Kerr ブラックホール解は

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}\left(d\hat{t} - a\sin^2\theta d\hat{\phi}\right)^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left((\hat{r}^2+a^2)d\hat{\phi} - ad\hat{t}\right)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}d\hat{r}^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (2)$$

$$\Delta := \hat{r}^2 - 2M\hat{r} + a^2, \quad \rho^2 := \hat{r}^2 + a^2\cos^2\theta, \quad a := \frac{GJ}{M}, \quad M := GM_{ADM} \quad (3)$$

と表され，ここでMはブラックホールの質量，J はブラックホールの角運動量である [34]．内側ホライズン(r_-)と外側ホライズン (r_+) は方程式$\Delta = 0$に対する 2 つの解として定義され

$$r_\pm := M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad (4)$$

である．$a = 0$, $r_+ = 2M$ のとき，Kerr ブラックホールは通常の Schwarzschild ブラックホールになる．もう一つの興味深い場合は，$a = M = \sqrt{GJ}$ と $r_\pm = M$ に対応する，エクストリーム極限の場合である．$J > \frac{M^2}{G}$ のとき，ホライズン半径の表式 (4) の中のルートが虚数になり，ホライズンは無くなるが，その代わりに $\hat{r} = 0$ における曲率に裸の特異点が現れる．この特異点は宇宙検閲官仮説に反する．そのため，宇宙検閲官仮説に従うと，角運動量は $J \leq \frac{M^2}{G}$ に制限される．この制限を理解するためのもう一つの方法はホライズンにおける角速度の公式

$$\Omega_H = \frac{a}{2Mr_+} \quad (5)$$

から，$a = M$ のとき，ホライズンの赤道は光速で回転していることになり，通常の物体はそれ以上速い角速度で回転することはできないということに相当する． Bekenstein と Hawking によると，ブラックホールは表面重力 κ，温度 T_H とエントロピーS

$$T_H = \frac{\hbar\kappa}{2\pi} = \frac{\hbar(r_+ - M)}{4\pi M r_+}, \quad S = \frac{\mathrm{Area}}{4\hbar G} = \frac{2\pi M r_+}{\hbar G} \tag{6}$$

を持っている．$a = M$ ならば，$T_H = 0$ なので，このエクストリーム・Kerr ブラックホールはある種の基底状態にあることに注意しよう．一般に，ある系の基底状態は励起状態よりも理解することが簡単である．この $T_H = 0$ となる $a = M$ の Kerr ブラックホール解の場合は，$a = 0$ の Schwarzschild ブラックホール解の場合よりもずっと理解しやすい対象になっていることが分かる．

3　NHEK = エクストリーム・Kerr ブラックホールのホライズン近傍極限

3.1　エクストリーム極限

$a = M$ の極限で，完全な Kerr 幾何についての公式は簡単になる．

$$r_\pm = a = M, \quad S = \frac{2\pi M^2}{\hbar G} = \frac{2\pi J}{\hbar}, \quad T_H = 0, \quad \Omega_H = \frac{a}{2Mr_+} = \frac{1}{2M}. \tag{7}$$

計量は

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}\left(d\hat{t} - a\sin^2\theta\, d\hat{\phi}\right)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}d\hat{r}^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left((\hat{r}^2 + a^2)\,d\hat{\phi} - a\,d\hat{t}\right)^2 + \rho^2 d\theta^2, \tag{8}$$

$$\Delta := (\hat{r} - a)^2, \quad \rho^2 := \hat{r}^2 + a^2\cos^2\theta \tag{9}$$

となる．

3.2　ホライズン近傍極限

エクストリーム・Kerr ブラックホール解のホライズン近傍領域は，種々のブラックホール解のホライズン近傍の AdS 領域と同様，強められた等長不変性をもっている．このとき，Bardeen と Horowitz [15] に従い，スケーリング・パラメータ λ を導入して，$\hat{r} = M$ の領域に近づくことができる．新しい座標系

$$r = \frac{\hat{r} - M}{\lambda M}, \tag{10}$$

$$t = \frac{\lambda \hat{t}}{2M}, \quad \phi = \hat{\phi} - \frac{\hat{t}}{2M} \tag{11}$$

は，λ をスケールするときに固定されているとする．したがって，$\lambda \to 0$ の極限において，元の動径座標 $\hat{r}$ はホライズンでの値 M に非常に近くなるように制限される．この極限において，(8) の計量はスムーズな計量

$$ds^2 = 2GJ\Omega^2 \left[r^2 dr^2 + d\theta^2 - \frac{dt^2}{r^2} + \Lambda^2 (d\phi + r\, dt)^2 \right] \tag{12}$$

になり，Ω^2 と Λ は

$$\Omega^2 := \frac{1 + \cos^2\theta}{2}, \quad \Lambda := \frac{2\sin\theta}{1 + \cos^2\theta} \tag{13}$$

で与えられる，θ に関する関数である. 公式 (12) はホライズン近傍エクストリーム Kerr 幾何 (NHEK) として知られている．このとき，計量全体にかかる因子として，ブラックホールの角運動量 J が現れることが分かる．この解は Kerr ブラックホー解の座標変換の極限として得られたので，Einstein 方程式の解であることは明らかであろう．計量 (12) は漸近的に平坦ではなく，実際，それは $r \to \infty$ において非常に特殊な漸近形をもっている．

極角 θ を固定したスライスに対し，局所的に AdS_3 の「ねじれ版」になっている，ある 3 次元幾何が存在することが容易に分かる．実際，特殊値 $\theta = \theta_0$: $\Lambda(\theta_0) = 1$ において，局所的計量は確かに AdS_3 の計量

$$ds^2 = 2\Omega^2 J \left[r^2 dr^2 - \frac{dt^2}{r^2} + (d\phi + r dt)^2 \right] \tag{14}$$

になる．AdS_3 上の重力は常に共形対称性をもつことが知られているので [11], これは，以下で議論する，エクストリーム Kerr ブラックホールについての基本的な共形対称性に関する強いヒントとなっている．

大域的には，NHEK の $\theta = \theta_0$ は AdS_3 のある商群である．これについての理由は，角 ϕ の周期性 $\phi \sim \phi + 2\pi$ による． AdS_3 空間のある商群が，双対な共形場理論の有限温度分配関数と関係していることがすでに知られており，この

後に，この周期性が Kerr/CFT にける有限温度を意味することが分かる．

θ のある値において現れる，ねじれた AdS_3 幾何は多くの論文で扱われていて [16-27] (dS_3 のいとこについては [28] を参照)，それらは押しつぶされた S^3 の Lorentz 的な類似物であることが知られている．このとき，元の丸い S^3 は等長変換群 $SU(2)\times SU(2)$ をもっている．もちろん S^3 はファイバーのある特定の半径をもつ，S^2 上での S^1 の Hopf ファイブレーションである．もし S^1 ファイバーの半径を変形できるならば，$SU(2)\times SU(2)$ を $SU(2)\times U(1)$ に壊すことができる．同様にして，等長変換群 $SL(2,R)_R \times SL(2,R)_L$ をもつ AdS_3 の商群を AdS_2 上の S^1 の Hopf 的ファイブレーションとして書くことができる．これは本質的に方程式 (12) に当たり，そのとき，ねじれた AdS_3 はファイバー半径を変形することで得られ，簡約化された等長変換群 $SL(2,R)\times U(1)$ をもつ．このように，NHEK 幾何において θ を固定した断面は $SL(2,R)\times U(1)$ をもち，これは NHEK の完全な等長変換群を与えることになる．

4　漸近的対称群

NHEK 空間上の量子重力に意味を持たせるために，境界条件を指定しなければならない．当面の問題点は $r\to\infty$ における境界がむしろ特殊であることである．つまり，それは Minkowski 空間の境界や AdS 空間の境界のようには見えない．そこで，その理論を定義するために，この境界条件について何か言及する必要がある．

このときの重要な考え方は，「自明な微分同型」を法として「許された微分同型」

$$\text{漸近的対称群} := \frac{\text{許された微分同型}}{\text{自明な微分同型}} \tag{15}$$

から成る，「漸近的対称群 (ASG)」である．

4.1　許された微分同型

(15) 式の許された微分同型を決定するためには境界条件を指定する必要がある．標準的な境界条件としては，r が無限遠の境界に近づくにつれ

$$g_{ab} = g^0_{ab} + \mathcal{O}(r^{-p_{ab}}) \tag{16}$$

の形をしているものを考える．このとき，g^0_{ab} は背景計量であり，p_{ab} はある整数である．境界条件が与えられると，許された微分同型 ξ は，任意の許された計量 g の変分 $\delta_\xi g$ 自身が許された計量になるような微分同型になる．例えば，標準的には，漸近的な Minkowski 空間における 4 次元量子重力に対し，計量が平坦な Minkowski 計量プラス $1/r$ の補正になるように要求する．したがって，補正が r^{16} のようになる微分同型を考えることは許されない．何故なら，これは，無限遠において消えず，境界条件を満たさない計量の変分になっているからである．許された計量の定義はダイナミックスについての情報を要求しないことに注意が必要である．

4.2　自明な微分同型

一方，自明な微分同型が何であるかを知るためにはダイナミックスについて知る必要がある．一度ダイナミックスが指定されると，すべての微分同型 ζ に対し，

$$\{Q_\zeta, \Phi\}_{DB} = \mathcal{L}_\zeta \Phi \tag{17}$$

に従うように正準的に定義された，随伴電荷 Q_ζ が存在し，ここで，$\{\cdot,\cdot\}_{DB}$ は所謂 Dirac 括弧を表し（この時点での議論は古典的である），Φは理論における場を表している． Dirac 括弧は局所対称性とそれに伴う拘束条件に適応するように作られたされた Poisson 括弧の変形版である．例えば，拘束条件 C_i の離散的な集合があるとすると，2 つの場の Dirac 括弧は

$$\{A, B\}_{DB} = \{A, B\} - \{A, C_i\}\{C_i, C_j\}^{-1}\{C_j, B\} \tag{18}$$

で定義され，ここで，$\{\cdot,\cdot\}$ は通常の Poisson 括弧を表す．この括弧は，A がそれ自身ある拘束条件で，拘束条件を保存するならば，明らかにゼロになる．重力において添え字 i は連続変数になり，逆行列 $\{C_i, C_j\}^{-1}$ は非局所的な Green 関数になる．

局所対称性に対し微分同型の生成子 Q_ζ は一般的な形

$$Q_\zeta = \int_{\text{境界}} X + \int_{\text{バルク}} C \tag{19}$$

をとる．典型的に，バルクの項は拘束条件の方程式（電磁気についての Gauss の法則や重力についての $G_{0\mu}$ の拘束条件）によりゼロになるので，微分同型は常に境界項によって生成される．これに関する，最も親しみのある重力の例は ADM 質量である．これは Dirac 括弧を介して時間推進を生成し，理論のハミルトニアンになっている． Dirac 括弧の非局所的な性質のため，境界項がそれ自身で時空全体の対称性を生成することが可能である．

AGS と商群 (15) の議論に戻ると，自明な微分同型はそれに対し $Q_\zeta = 0$ となるものである．例えば，コンパクトなサポートをもち，無限遠で消える微分同型は自明になる．このように，AGS の生成子はおおよそ境界条件により許されるが，ゼロでない電荷を生み出すように無限遠でゆっくりと消える微分同型として考えられる．

5　Kerr/CFT

現在までに Dirac 括弧と Q_ζ 生成子を記述するために多くの手法が発展してきた [24,30- 33]．ここでは，この手法を用いて，NHEK に対する，無矛盾な境界条件を探ってみることにする．まず，境界条件がエクストリーム性

$$\mathcal{E} = \frac{M^2}{G} - J = 0 \tag{20}$$

を保存するということを保証するために，ある制限を課す．非エクストリームな場合については後半で議論する．最初にエクストリーム・Kerr ブラックホールを扱うのは，ある意味で，ゼロでないエネルギー $\mathcal{E}$ を含む一般的な場合よりも理解しやすいということである． $\mathcal{E} = 0$ となる，無矛盾な境界条件が論文 [34] で発見された．以下ではこれについて詳しく解説する．

5.1 NHEK に対する ASG

ここでは計量の補正項 h について境界条件

$$\begin{aligned} &h_{tt} = \mathcal{O}(r^2), \quad h_{t\phi} = h_{\phi\phi} = \mathcal{O}(1), \\ &h_{\phi r} = h_{\theta\theta} = h_{\theta\phi} = h_{\theta t} = \mathcal{O}(r^{-1}), \\ &h_{rr} = \mathcal{O}(r^{-3}), \quad h_{tr} = h_{\theta r} = \mathcal{O}(r^{-2}) \end{aligned} \tag{21}$$

を要求する [34]．この境界条件を保存する最も一般的な微分同型は

$$\zeta = \left[\epsilon(\phi) + \mathcal{O}(r^{-2})\right]\partial_\phi + \left[-r\epsilon'(\phi) + \mathcal{O}(1)\right]\partial_r + \left[C + \mathcal{O}(r^{-3})\right]\partial_\tau + \left[\mathcal{O}(r^{-1})\right]\partial_\theta \tag{22}$$

であり，ここで，$\epsilon(\phi)$ は任意の微分可能な関数，C は任意定数である．(22) 式のサブリーディング項とリーディングの ∂_τ 項は自明な微分同型に対応するため，それらは Q_ζ に寄与しない．したがって，商群 (15) の表現として，リーディング部分

$$\zeta(\epsilon) = \epsilon(\phi)\partial_\phi - r\epsilon'(\phi)\partial_r \tag{23}$$

をとることができる．言い換えると，このベクトル場が NHEK 幾何の ASG を生成するといえる．基底

$$\zeta_n := \zeta(-e^{-in\phi}) = -e^{-in\phi}\partial_\phi - in\, e^{-in\phi} r\, \partial_r \tag{24}$$

を導入すると，このベクトル場 ζ_n の Lie 括弧 [1] は

$$i\,[\zeta_n, \zeta_m] = (m-n)\zeta_{m+n} \tag{25}$$

を満たす．(25) から ASG が一組の Virasoro 代数のコピーにより生成されることが分かる．この時点では，古典論的なベクトル場を扱っているため，中心電荷はないことに注意すべきである．

---

[1] $[X, Y] = \mathcal{L}_X Y - \mathcal{L}_Y X$

5.2　中心電荷

ここでは，ζ_n の Lie 括弧 (25) よりも，ζ_n の微分同型を生成する電荷の Dirac 括弧を考えたい．その構造から，その電荷の Dirac 括弧代数は

$$\{Q_\zeta, \Phi\}_{DB} = \mathcal{L}_\zeta \Phi \tag{26}$$

を満たす． Jacobi 恒等式を使うと，

$$\{Q_\zeta, Q_\xi\}_{DB} = Q_{[\zeta,\xi]} + c_{\zeta\xi} \tag{27}$$

が成り立ち，このとき，$c_{\zeta\xi}$ が中心項である． (27) の中心項は Q_ζ についての具体的な表式から古典重力を使って計算できる．$g_{\mu\nu}$ と $g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ の近接する幾何の間の無限小の電荷の変分は

$$\delta Q_\zeta = \frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\Sigma} K_\zeta(h,g) \tag{28}$$

で与えられ，このとき，積分領域は空間的なスライスの境界上であり，

$$\begin{aligned} K_\zeta(h,g) = -\frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} dx^\alpha \wedge dx^\beta \Big[&\zeta^\nu D^\mu h - \zeta^\nu D_\sigma h^{\mu\sigma} + \zeta_\sigma D^\nu h^{\mu\sigma} \\ &+ \frac{1}{2} h D^\nu \zeta^\mu + \frac{1}{2} h^{\sigma\nu}(D^\mu \zeta_\sigma - D_\sigma \zeta^\mu)\Big]. \end{aligned} \tag{29}$$

この表式とその先駆的な多くの公式は，50年代の ADM の研究からスタートし，長い間研究されてきた． (28) 式から，許された微分同型によって生み出されたゆらぎ $h = \mathcal{L}_\xi g$ (ここで g は NHEK 計量) にその方法を適用することにより，中心電荷を決定できる．この計算の結果，中心電荷に対するより具体的な表式

$$c_{\xi\zeta} = \frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\Sigma} K_\zeta(\mathcal{L}_\xi g, g) \tag{30}$$

が得られる．基底 (24) を用いると

$$\{Q_{\zeta_m}, Q_{\zeta_n}\}_{DB} = Q_{[\zeta_m,\zeta_n]} - iJ(m^3 + 2m)\delta_{m+n} \tag{31}$$

となることがわかる．古典論的な電荷 Q_ζ は作用の単位を持っているので，$\hbar$ を用いて無次元量

$$\hbar L_n = Q_{\zeta_n} + \frac{3J}{2}\delta_n \tag{32}$$

を定義し，Dirac 括弧に対する通常の量子化の規則 $\{\cdot,\cdot\}_{DB} \to -\frac{i}{\hbar}[\cdot,\cdot]$ をこれに適用する．量子論的な電荷の代数は

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{J}{\hbar}m(m^2-1)\delta_{m+n} \tag{33}$$

となる．この式から NHEK 幾何に対する中心電荷

$$c = \frac{12J}{\hbar} \tag{34}$$

を読み取ることができる．これは，境界条件 (21) を備えた NHEK における $\mathcal{E}=0$ の状態は中心電荷 $\frac{12J}{\hbar}$ の Virasoro 代数の片方の表現を形成し，この意味で，2 次元 CFT（のカイラルな半分）を形成しなければならないということを表している．この 2 次元共形対称性は 4 次元微分同型群とホログラフィックな接続を持って現れる（(23) における動径項の $\epsilon'\partial_r$ に注意）．

5.3　Cardy エントロピー

CFT は多くの普遍的性質を持っており，この性質はブラックホール・ダイナミックスの多くの普遍的性質に対応が付くはずである．まず，明確にすべきことは，CFT の中でブラックホール・エントロピーに対する Bekenstein -Hawking 公式 $S_{BH} = \frac{2\pi J}{\hbar}$ を再現する方法があるかどうかということである．この公式を有限温度における CFT の微視的状態の縮退度を用いて理解したいのであるが，エクストリーム・Kerr ブラックホールの Hawking 温度はゼロなので，一見パズルのように思える．このパズルは，2 つの妥当な保存量の存在により回避することができる.その内の一つが Hawking 温度と共役なエネルギーであり，もう一つは角速度と共役な角運動量である．ここではまず，ブラックホールのホライズン近傍領域での微視的状態数を考えてみることにする．

一般に，ブラックホールは純粋状態ではなく，混合状態であり，ブラックホー

ルの周りの量子場は熱的状態にある．Schwarzschild ブラックホールに対し，熱的状態は Boltzmann 因子

$$e^{-\omega/T_H} \tag{35}$$

により，重みがつく．角運動量を加えるとこれは

$$e^{-(\omega-m\Omega_H)/T_H} \tag{36}$$

になり，ここで，Ω_H はホライズンの角速度で，エクストリーム Kerr については (7) である．Kerr のエクストリーム極限を注意してとるとき，T_H はゼロになるが，これは必ずしも重み因子 (36) が自明であることを意味してわけではない．これについての理由は，$m\Omega_H$ に非常に近い ω をもつ状態が可能になることである．エクストリーム極限 $T_H \to 0$ において，角運動量 m によって重みを付けられた密度行列に寄与する，$\omega = m\Omega_H$ の状態を得ることができる．注意して極限をとると，$T_H \to 0$ に対し，

$$e^{-(\omega-m\Omega_H)/T_H} \to e^{-2\pi m} = e^{-m/T_L} \tag{37}$$

であることがわかる．ここから適切な温度が $T_L = 1/2\pi$ として読み取ることができる．また，角運動量 m は L_0 の固有値であることも特筆すべき点である．カイラル CFT についての Cardy のエントロピー公式を使って，エントロピーは

$$S_{cardy} = \frac{\pi^2}{3} c T_L = \frac{\pi^2}{3} \frac{12J}{\hbar} T_L = \frac{2\pi J}{\hbar} \tag{38}$$

に従うことがわかり，これはまさに Bekenstein -Hawking エントロピー公式 (6) と正確に一致する．

ここで用いた Cardy 公式は，統計的な理由を適用するにあたり，正当な理由が与えられたときに機能するということに注意すべきである．それは 2 次元 CFT の統計的な極限に属し，[35] で研究されたようにブラックホールの統計的な極限と関係している．Cardy 公式が正しいための十分条件は温度が中心電荷に比べ大きいことであり，ここで考えている場合とは異なる．また，[9] で研

究された弦理論的なブラックホールの場合とも異なる．この場合には，温度は電荷の一種で，超重力近似が正しいときの極限において，その温度は中心電荷に比べパラメーター的に小さくなっていた．しばしば，Cardy 公式の適用可能性に対する十分条件は温度が，理論の最も軽い励起またはギャップに比べ大きいことであり，これは多くの自由度が励起されていることを意味する．本質的に，それは CFT における多くの自由度に適用された熱力学的極限になっている．我々は実際にはエクストリーム Kerr ブラックホールに対するギャップは非常に小くなければならないということを知っている．それは 20 年前，半古典的な理由だけから，Preskill, Schwarz, Shapere, Trivedi と Wilczek [35] の論文で計算された．彼らは，もし，エクストリーム・ブラックホールのギャップが充分大きいならば，ブラックホールはそのギャップよりも小さいエネルギーをもった量子を放出しないので，Hawking の計算は無効になることを示した．したがって，大きなギャップは半古典的な Hawking の計算と矛盾する．この議論はギャップのサイズの上限も与え，Kerr に対し，L_0 は $1/J$ のオーダーであることが示された．温度 $T_L = \frac{1}{2\pi}$ はすでにこれよりも断然大きいので，Cardy 公式は適用可能であろう．同様の考え方が弦理論の計算も正当化した [36].

これまでの議論において見てきた重力と CFT の間の性質の一致は，様々な性質の一致のうちの 1 つの場合にしかすぎない．中心電荷とエントロピーが様々な幾何学的データの複雑な関数になっていて，その関数全体が一致するような，この構造の多くの一般化が存在する [37-54]．さらに，定性的には異なるが，Kerr/CFT をサポートする証拠は NHEK における散乱振幅からも得られる． Kerr 散乱振幅は [55-59] で計算され，それは，ブラックホールと入射波と散乱波のそれぞれのエネルギーとスピンに依存した変数をもつ 4 個のガンマ関数の比を含む複雑な積であることが分かった．これらの振幅は有限温度の CFT 相関関数に正確に対応することが様々な意味で示され [60-63]，エクストリーム Kerr ブラックホールを CFT として見做せることが示された.

5.4　エクストリーム性を超えて

次に，エクストリーム性を超えたらどうなるかということ，つまり，

$\mathcal{E} = M^2 - J > 0$ の場合を考えてみることにする．エクストリーム性からの微小偏差に対し，Castro と Larsen [64] およびそのほかの研究者 [65-67] は，Virasoro 代数のもう片方のコピーを導く境界条件を発見した．保存量 $\mathcal{E}$ はNHEK の $SL(2,R)$ 等長変換に由来するので，それに適した Virasoro 代数は，前に説明した $U(1)$ が強められたものというよりもむしろ $SL(2,R)$ 等長変換が強められたものになっている．

エクストリーム性からの微小偏差を超えたところで考えるためには，重力反作用の効果を含める必要がある．この反作用を受ける幾何はもはや漸近的にNHEK ではなく，全体像が破綻する．これが何を意味するのか，どのように克服できるのかは現時点では明らかではない．一つのアプローチとして，Kerr/CFT を弦理論の中に埋め込むことで洞察を得て，弦理論の中でどのように問題が解けるかを見てみようとする試みがある [68, 69].

6　一般の Kerr に対する隠れた共形対称性

6.1　*SL*(2, *R*) カシミールとしての波動方程式

Kerr 幾何におけるスカラー・ラプラシアン ∇^2 を考えてみよう．Killing-Yano テンソル $f_{\mu\nu}$ を用いて[2]，∇^2と交換する 2 階微分作用素 $f_\alpha{}^\mu f^{\alpha\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ を作ることができる．これにより波動方程式は変数分離でき [14]，その解の形を

$$\Phi(t,r,\theta,\phi) = e^{-i\omega t+im\phi}R(r)S(\theta) \tag{39}$$

と表すことができる．このとき，分離定数を K_l とすると，$R(r)$と$S(\theta)$に関する方程式

$$-K_l S(\theta) = \left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} + \omega^2 a^2\cos^2\theta\right]S(\theta) \tag{40}$$

と

$$\begin{aligned} K_l R(r) = \Bigg[&\partial_r(\Delta\partial_r) + \frac{(2Mr_+\omega - am)^2}{(r-r_+)(r_+-r_-)} - \frac{(2Mr_-\omega - am)^2}{(r-r_-)(r_+-r_-)} \\ &+ (r^2 + 2M(r+2M))\omega^2\Bigg]R(r) \end{aligned} \tag{41}$$

---

[2] $f_{\mu\nu} = -f_{\nu\mu}$, $\nabla_{(\lambda}f_{\mu)\nu} = 0$

を得る．この両方の方程式は，数値的にしか知られていない，Heun 関数を使って解かれる．しかし，低振動数近似を使ってこの方程式を簡単にすることができる． (40) 式右辺の最後の項は，$\omega M \ll 1$ のとき（ブラックホール半径よりも長い励起波長に対して)，無視できる．このとき，重なる部分が広い，2 つの領域

$$\begin{aligned} \text{“近い領域”}: &\quad r \ll \frac{1}{\omega}, \\ \text{“遠い領域”}: &\quad r \gg M \end{aligned} \tag{42}$$

に分けることができる. そのとき, 方程式 (40) と (41) を“近い領域”と“遠い領域”の両方で解くことができ，中間領域

$$M \ll r_{match} \ll \frac{1}{\omega} \tag{43}$$

における r の任意の値 r_{match} でそれらの解を一致させることができ，この近似において，解が r_{match} に依らないという事は“近い領域”の解が，r_{match} の変換の下で特殊な対称性をもたなければならないということを課すことになる．さらに，赤方偏移因子は r に依るので，r_{match} の変換はスケール変換と結びついている．これは，“近い領域”の物理が，一致する面の偏移の下で完全解が不変であることから生じるある種の共形対称性を示しているという強いヒントを与える．以下で，実際にそうなっていること確かめてみることにする．

$\omega M \ll 1$ の極限において，方程式 (40) の右辺の微分作用素は単純な球面ラプラシアンになり，$K_l = l(l+1)$ として，球面調和関数を用いて解くことができる．“遠い領域”における動径方向の方程式 (41) は Bessel 関数を用いて解かれる．また，“近い領域”において，動径方向の方程式は

$$\left[\partial_r(\Delta\partial_r) + \frac{(2Mr_+\omega - am)^2}{(r-r_+)(r_+-r_-)} - \frac{(2Mr_-\omega - am)^2}{(r-r_-)(r_+-r_-)}\right] R(r) = l(l+1)\, R(r) \tag{44}$$

になり，その解は超幾何関数を使って表される．ここで，超幾何関数が $SL(2,R)$ の表現を形成するという事から，隠れた共形対称性が存在することが期待できる．

スカラー摂動に対する Laplace 方程式に現れる，この近傍領域での $SL(2,R)$ 対称性は自然な共形変数

$$\begin{aligned} w^+ &= \sqrt{\frac{r-r_+}{r-r_-}}\, e^{2\pi T_R \phi}, \\ w^- &= \sqrt{\frac{r-r_+}{r-r_-}}\, e^{2\pi T_L \phi - t/2M}, \\ y &= \sqrt{\frac{r-r_+}{r-r_-}}\, e^{\pi(T_R+T_L)\phi - t/4M} \end{aligned} \tag{45}$$

を導入することにより明らかになる．ここで

$$T_L = \frac{r_+ + r_-}{4\pi a}, \quad T_R = \frac{r_+ - r_-}{4\pi a} \tag{46}$$

である．ここで，ベクトル場

$$\begin{aligned} H_1 &:= i\partial_+, \\ H_0 &:= i\left(w^+\partial_+ + \frac{1}{2}y\partial_y\right), \\ H_{-1} &:= i\left(w^{+2}\partial_+ + w^+ y\partial_y - y^2\partial_-\right) \end{aligned} \tag{47}$$

と

$$\begin{aligned} \bar{H}_1 &:= i\partial_-, \\ \bar{H}_0 &:= i\left(w^-\partial_- + \frac{1}{2}y\partial_y\right), \\ \bar{H}_{-1} &:= i\left(w^{-2}\partial_- + w^- y\partial_y - y^2\partial_+\right) \end{aligned} \tag{48}$$

を定義すると，このベクトル場は $SL(2,R)$ 代数

$$[H_0, H_{\pm 1}] = \mp i H_{\pm 1}, \quad [H_{-1}, H_1] = -2iH_0 \tag{49}$$

にしたがい，$\bar{H}_0$ と $\bar{H}_{\pm 1}$ についても同様である．(t, r, θ, ϕ) 変数で書かれた，$SL(2,R)$ の 2 次の Casimir 作用素は

$$\mathcal{H}^2 = \bar{\mathcal{H}}^2 = \partial_r(\Delta\partial_r) + \frac{(2Mr_+\omega - am)^2}{(r-r_+)(r_+-r_-)} - \frac{(2Mr_-\omega - am)^2}{(r-r_-)(r_+-r_-)}\,. \tag{50}$$

この結果として，近傍領域における $\Phi(r)$ に対する方程式 (44) は

$$\mathcal{H}^2\Phi = \bar{\mathcal{H}}^2\Phi = l(l+1)\Phi \tag{51}$$

と書くことができる．この方程式は，共形ウェイト

$$(h_L, h_R) = (l, l) \tag{52}$$

をもつ $SL(2,R)$ の表現として，Φ に対する解を与える．しかし，$SL(2,R)_L \times SL(2,R)_R$ は近傍領域スカラー波動方程式の対称性であるが，それは余分な周期性

$$\phi \sim \phi + 2\pi \tag{53}$$

により壊れている．周期性 (53) の下で，共形座標は

$$w^+ \sim e^{4\pi^2 T_R} w^+,\ w^- \sim e^{4\pi^2 T_L} w^-,\ y \sim e^{2\pi^2 (T_R+T_L)} y \tag{54}$$

のような周期性を持つ．この周期性は

$$g = e^{-4\pi^2 i T_R H_0 - 4\pi^2 i T_L \bar{H}_0},\ g \in SL(2,R)_L \times SL(2,R)_R \tag{55}$$

によって生成され，これは正に，有限温度(T_L, T_R)における CFT の分配関数に対する周期性の形になっている．

上で議論した近傍領域は，固定した M に対し r は任意に大きくなれるので，“ ホライズン近傍” 領域ではないということと，共形対称性は，波動方程式の解に作用するが，幾何学的等長変換対称性ではないということに注意が必要である

6.2 Cardy エントロピー

ここで，より一般的な Kerr ブラックホールに対し，有限温度 (46) における，ある基本的な CFT が存在すると仮定してみよう．その Kerr ブラックホールのエントロピーは Cardy の公式

$$S = \frac{\pi^2}{3} c_L T_L + \frac{\pi^2}{3} c_R T_R \tag{56}$$

によって与えられるであろう．エクストリームな場合とエクストリームから 1 次の変分だけ離れた場合について，中心電荷が $c_L = c_R = \frac{12J}{\hbar}$ となることが知られている．そこで，中心電荷はスムーズに振る舞い，エクストリームな場合から離れても変化しないと仮定し，温度に対し (46) を用いると，

$$S_{Cardy} = \frac{\pi^2}{3}\frac{12J}{\hbar}\left(\frac{r_+ + r_-}{4\pi a} + \frac{r_+ - r_-}{4\pi a}\right) = \frac{2\pi r_+ J}{\hbar a} = \frac{2\pi M r_+}{\hbar G} = S_{BH}! \tag{57}$$

に到達する．これを Bekenstein -Hawking の公式 (6) と比べると，より一般的な M, J の Kerr ブラックホールのエントロピーが Cardy 公式のエントロピーと正確に一致することが分かる．一方，近傍領域低エネルギー散乱振幅を考えることにより，これらの振幅は非エクストリーム Kerr の場合にも CFT の振幅と正確に一致することが知られている [70].

このとき，散乱振幅は，作用関数の対称性からは出てこない対称性をもっていることが分かっている．

M と J の一般的な値をもつブラックホールが 2D CFT に双対であるという事を示す，ASG や他のタイプの議論は今のところ存在しないようであるが，散乱振幅やエントロピー公式の現象論的な解析は隠れた２次元共形対称性を示していることを明らかにしているようであう．

7　将来の方向性

現時点でいくつかのことが理解できたが，Kerr/CFT の理論的な構造にかかわる，相互に関連した問題や疑問が残っていて，以上の説明の中でも取り上げられている．これらの疑問や問題をまとめると，次の通りである．

(i) ASG を生成する Virasoro 代数のうち右向きまたは左向きの一方を与える境界条件はわかっている．では，両方を一辺に与える境界条件は存在するか？もし存在しないならば，なぜ存在しないのか？

(ii) 有限な $M^2 - J$ において NHEK 領域が無くなるという事実を，どう理解す

ればよいのか？

(iii) Unruh-Starobinsky の量子超放射によるエクストリーム Kerr の不安定性を CFT の性質とどのように一致させればよいのか？

(iv) 隠れた共形対称性はどこから来るのか？また，Cardy 公式はなぜ機能するのか？隠れた共形対称性を説明するために近傍領域 $r \ll \frac{1}{\omega}$ に適用できる，標準的な ASG 解析の一般化は存在するのか？

(v) 非カイラル CFT における熱的状態を一般的な Kerr ブラックホールに一致させることは期待できる．そのような状態は 3 つのパラメータ c, T_L と T_R をもっているが，Kerr は 2 つのパラメータ M と J しかもっていず，したがって，よく見積もっても，CFT の部分空間を記述できるのみである．この部分空間への制限はどこから来るのか？一般的な CFT 状態に対するホログラフィック双対は存在するのか？

多分，これらの問題を解決するための最も約束されたアプローチとしては Kerr/CFT を弦理論に埋め込むことであろう．実際，AdS_3 の Brown-Henneaux による解析の多くの側面は，弦理論への埋め込みが発見されるまで，理解されていなかったはずである．最近，Kaluza-Klein S^1 を伴う，5 次元の，荷電回転ブラックホールの研究で，この方向における発展があった [68]．これに対応する NHEK 幾何の構造は電荷の値に依存しており，電荷が最大値に達するとき，NHEK 幾何は局所的に $AdS_3 \times S^3$ に近づくことが分かった．さらに，最大値における双対は標準的な弦理論的方法と同一視され，Kerr/CFT から予想される中心電荷をもつことが分かった．最大点から離れた点で線形化された性質も Kerr/CFT 対応の予想と一致するようである．

さらに最近，電荷の有限なすべての擬最大値に対し，双対理論はゼロではない電荷密度を伴う，巻きついた D- ブレイン系の低エネルギー極限と同一視できることが議論された [71]．このような構成法により，上で述べた一般的な難問が解決でき，それが弦理論の詳細に依らない解を与えるのではないかという希望的観測がなされているようである．

もちろん、Kerr/CFT 対応は現実の世界にも適用できるので，その対称性の観測上の結果を見つけることを試みる前に，その理論構造の面をすべて理解する

ことは必要ではないが，実験と理論の比較は両方を理解するうえでのある構成要素になりえる． Kerr/CFT 対応は空に見上げる天体にも適用できる対称性についての記述のようであり，現在，それらの天体の観測データは良いものであり，急速に改善されている。また，まだ理解されていない，多くの天体現象が存在することも報告されている [12, 13]．対称性は予測と観測データを組織化するためのフレームワークの両方を提供し，何を捜すべきであるかを示唆することがよくある．ブラックホールの性質の解析では，回転していない場合かまたは回転のパラメータに小さい摂動がある場合に注目することが多いが，このとき，興味深い単純化がエクストリーム極限の近傍で起こるようである．

参考文献

[1] I. Bredberg, C. Keeler, V. Lysov and A. Strominger, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **216**, 194-210 (2011) [arXiv:1103.2355 [hep-th]].

[2] D. Christodoulou, Phys. Rev. Lett. **25**, 1596 (1970).

[3] S. W. Hawking, “Gravitational radiation from colliding black holes,” Phys. Rev. Lett. **26**, 1344 (1971).

[4] J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking, “The Four laws of black hole mechanics,” Commun. Math. Phys. **31**, 161 (1973).

[5] J. D. Bekenstein, “Black holes and entropy,” Phys. Rev. D **7**, 2333 (1973).

[6] J. D. Bekenstein, “Extraction of energy and charge from a black hole,” Phys. Rev. D **7**, 949 (1973).

[7] J. D. Bekenstein, “Generalized second law of thermodynamics in black hole physics,” Phys. Rev. D **9**, 3292 (1974).

[8] S. W. Hawking, “Particle Creation By Black Holes,” Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975) [Erratum-ibid. **46**, 206 (1976)].

[9] A. Strominger and C. Vafa, “Microscopic Origin of the Bekenstein-Hawking Entropy,” Phys. Lett. B **379**, 99 (1996) [arXiv:hep-th/9601029].

[10] A. Strominger, “Black hole entropy from near-horizon microstates,” JHEP **9802**, 009 (1998) [arXiv:hep-th/9712251].

[11] J. D. Brown and M. Henneaux, “Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity,” Commun. Math. Phys. **104**,

207 (1986).

[12] J. E. McClintock *et al*., “Measuring the Spins of Accreting Black Holes,” arXiv:1101. 0811 [astro-ph.HE].

[13] J. E. McClintock, R. Shafee, R. Narayan, R. A. Remillard, S. W. Davis and L. X. Li, “The Spin of the Near-Extreme Kerr Black Hole GRS 1915+105,” Astrophys. J. **652**, 518 (2006) [arXiv:astro-ph/0606076].

[14] B. Carter, “Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields,” Phys. Rev. **174**, 1559; Comm. Math. Phys. **10**, 280.

[15] J. M. Bardeen and G. T. Horowitz, “The extreme Kerr throat geometry: A vacuum analog of AdS(2) x S(2),” Phys. Rev. D **60**, 104030 (1999) [arXiv:hep-th/9905099].

[16] Y. Nutku, “Exact solutions of topologically massive gravity with a cosmological constant,” Class. Quant. Grav. **10**, 2657 (1993).

[17] M. Gürses, “Perfect Fluid Sources in 2+1 Dimensions,” Class. Quant. Grav. **11**, 2585 (1994).

[18] M. Rooman and P. Spindel, “Goedel metric as a squashed anti-de Sitter geometry,” Class. Quant. Grav. **15**, 3241 (1998) [arXiv:gr-qc/9804027].

[19] A. Bouchareb and G. Clement, “Black hole mass and angular momentum in topologically massive gravity,” Class. Quant. Grav. **24**, 5581 (2007) [arXiv:0706.0263 [gr-qc]].

[20] C. P. Herzog, M. Rangamani and S. F. Ross, “Heating up Galilean holography,” JHEP **0811**, 080 (2008) [arXiv:0807.1099 [hep-th]].

[21] D. Anninos, “Hopfing and Puffing Warped Anti-de Sitter Space,” JHEP **0909**, 075 (2009) [arXiv:0809.2433 [hep-th]].

[22] D. Anninos, M. Esole and M. Guica, “Stability of warped AdS3 vacua of topologically massive gravity,” JHEP **0910**, 083 (2009) [arXiv:0905.2612 [hep-th]].

[23] D. Anninos, W. Li, M. Padi, W. Song and A. Strominger, “Warped AdS3 Black Holes,” JHEP **0903**, 130 (2009) [arXiv:0807.3040 [hep-th]].

[24] G. Compere and S. Detournay, “Semi-classical central charge in topologically massive gravity,” Class. Quant. Grav. **26**, 012001 (2009) [Erratum-ibid. **26**, 139801 (2009)] [arXiv:0808.1911 [hep-th]].

[25] G. Compere and S. Detournay, “Boundary conditions for spacelike and timelike warped AdS3 spaces in topologically massive gravity,” JHEP **0908**, 092 (2009) [arXiv:0906.1243 [hep-th]].

[26] E. D'Hoker and P. Kraus, “Charged Magnetic Brane Solutions in AdS5 and the fate of the third law of thermodynamics,” JHEP **1003**, 095 (2010) [arXiv:0911.4518 [hep-th]].

[27] S. Detournay, D. Israel, J. M. Lapan and M. Romo, “String Theory on Warped AdS3 and Virasoro Resonances,” JHEP **1101**, 030 (2011) [arXiv:1007.2781 [hep-th]].

[28] D. Anninos and T. Hartman, “Holography at an Extremal De Sitter Horizon,” JHEP **1003**, 096 (2010) [arXiv:0910.4587 [hep-th]].

[29] G. Barnich, C. Troessaert, “Aspects of the BMS/CFT correspondence,” JHEP **1005**, 062 (2010). [arXiv:1001.1541 [hep-th]].

[30] G. Barnich and F. Brandt, “Covariant theory of asymptotic symmetries, conservation laws and central charges,” Nucl. Phys. B **633**, 3 (2002) [arXiv:hep-th/0111246].

[31] G. Barnich, “Boundary charges in gauge theories: Using Stokes theorem in the bulk,” Class. Quant. Grav. **20**, 3685 (2003) [arXiv:hep-th/0301039].

[32] G. Compere, “Symmetries and conservation laws in Lagrangian gauge theories with applications to the mechanics of black holes and to gravity in three dimensions,” arXiv:0708.3153 [hep-th].

[33] G. Barnich and G. Compere, “Surface charge algebra in gauge theories and thermodynamic integrability,” J. Math. Phys. **49**, 042901 (2008) [arXiv:0708.2378 [gr-qc]].

[34] M. Guica, T. Hartman, W. Song and A. Strominger, “The Kerr/CFT Correspondence,” Phys. Rev. D **80**, 124008 (2009) [arXiv:0809.4266 [hep-th]].

[35] J. Preskill, P. Schwarz, A. D. Shapere, S. Trivedi and F. Wilczek, “Limitations on the statistical description of black holes,” Mod. Phys. Lett. A **6**, 2353 (1991).

[36] J. M. Maldacena, L. Susskind, “D-branes and fat black holes,” Nucl. Phys. **B475**, 679-690 (1996). [hep-th/9604042].

[37] H. Lu, J. Mei and C. N. Pope, “Kerr/CFT Correspondence in Diverse Dimensions,” JHEP **0904**, 054 (2009) [arXiv:0811.2225 [hep-th]].

[38] T. Azeyanagi, N. Ogawa and S. Terashima, “Holographic Duals of Kaluza-Klein Black Holes,” JHEP **0904**, 061 (2009) [arXiv:0811.4177 [hep-th]].

[39] T. Hartman, K. Murata, T. Nishioka and A. Strominger, “CFT Duals for Extreme Black Holes,” JHEP **0904**, 019 (2009) [arXiv:0811.4393 [hep-th]].

[40] D. D. K. Chow, M. Cvetic, H. Lu and C. N. Pope, “Extremal Black Hole/CFT Correspondence in (Gauged) Supergravities,” Phys. Rev. D **79**, 084018 (2009) [arXiv:0812.2918 [hep-th]].

[41] H. Isono, T. S. Tai and W. Y. Wen, “Kerr/CFT correspondence and five-dimensional BMPV black holes,” Int. J. Mod. Phys. A **24**, 5659 (2009) [arXiv:0812.4440 [hep-th]].

[42] T. Azeyanagi, N. Ogawa and S. Terashima, “The Kerr/CFT Correspondence and String Theory,” Phys. Rev. D **79**, 106009 (2009) [arXiv:0812.4883 [hep-th]].

[43] J. J. Peng and S. Q. Wu, “Extremal Kerr black hole/CFT correspondence in the five dimensional Gódel universe,” Phys. Lett. B **673**, 216 (2009) [arXiv:0901.0311 [hep-th]].

[44] C. M. Chen and J. E. Wang, “Holographic Duals of Black Holes in Five-dimensional

Minimal Supergravity," Class. Quant. Grav. **27**, 075004 (2010) [arXiv:0901.0538 [hepth]].

[45] F. Loran and H. Soltanpanahi, "5D Extremal Rotating Black Holes and CFT duals," Class. Quant. Grav. **26**, 155019 (2009) [arXiv:0901.1595 [hep-th]].

[46] A. M. Ghezelbash, "Kerr/CFT Correspondence in the Low Energy Limit of Heterotic String Theory," JHEP **0908**, 045 (2009) [arXiv:0901.1670 [hep-th]].

[47] H. Lu, J. w. Mei, C. N. Pope and J. F. Vazquez-Poritz, "Extremal Static AdS Black Hole/CFT Correspondence in Gauged Supergravities," Phys. Lett. B **673**, 77 (2009) [arXiv:0901.1677 [hep-th]].

[48] G. Compere, K. Murata and T. Nishioka, "Central Charges in Extreme Black Hole/CFT Correspondence," JHEP **0905**, 077 (2009) [arXiv:0902.1001 [hep-th]].

[49] D. Astefanesei and Y. K. Srivastava, "CFT Duals for Attractor Horizons," Nucl. Phys. B **822**, 283 (2009) [arXiv:0902.4033 [hep-th]].

[50] M. R. Garousi and A. Ghodsi, "The RN/CFT Correspondence," Phys. Lett. B **687**, 79 (2010) [arXiv:0902.4387 [hep-th]].

[51] T. Azeyanagi, G. Compere, N. Ogawa, Y. Tachikawa and S. Terashima, "Higher-Derivative Corrections to the Asymptotic Virasoro Symmetry of 4d Extremal Black Holes," Prog. Theor. Phys. **122**, 355 (2009) [arXiv:0903.4176 [hep-th]].

[52] X. N. Wu and Y. Tian, "Extremal Isolated Horizon/CFT Correspondence," Phys. Rev. D **80**, 024014 (2009) [arXiv:0904.1554 [hep-th]].

[53] M. Becker, S. Cremonini and W. Schulgin, "Extremal Three-point Correlators in Kerr/CFT," JHEP **1102**, 007 (2011) [arXiv:1004.1174 [hep-th]].

[54] M. Becker, S. Cremonini and W. Schulgin, "Correlation Functions and Hidden Conformal Symmetry of Kerr Black Holes," JHEP **1009** (2010) 022 [arXiv:1005.3571 [hep-th]].

[55] A. A. Starobinsky, "Amplification of waves during reflection from a rotating black hole," Zh. Exp. i Teoret. Fiz., **64**, 48 (transl. in Soviet Phys. JETP, **37**, 28).

[56] A. A. Starobinsky and S. M. Churilov, "Amplification of electromagnetic and gravitational waves scattered by a rotating black hole," Zh. Exp. i Teoret. Fiz., **65**, 3.

[57] S. A. Teukolsky, "Perturbations of a rotating black hole. 1. Fundamental equations for gravitational, electromagnetic and neutrino ?eld perturbations," Astrophys. J. **185**, 635 (1973).

[58] W. H. Press and S. A. Teukolsky, "Perturbations of a Rotating Black Hole. II. Dynamical Stability of the Kerr metric," Astrophys. J. **185**, 649 (1973).

[59] W. H. Press and S. A. Teukolsky, "Perturbations of a Rotating Black Hole. III -Interaction of the Hole with Gravitational and Electromagnetic Radiation," Astrophys. J. **193**, 443 (1974).

[60] I. Bredberg, T. Hartman, W. Song and A. Strominger, "Black Hole Superradiance From Kerr/

CFT," JHEP **1004**, 019 (2010) [arXiv:0907.3477 [hep-th]].

[61] M. Cvetic and F. Larsen, "Greybody Factors and Charges in Kerr/CFT," JHEP **0909**, 088 (2009) [arXiv:0908.1136 [hep-th]].

[62] T. Hartman, W. Song and A. Strominger, "Holographic Derivation of Kerr-Newman Scattering Amplitudes for General Charge and Spin," JHEP **1003**, 118 (2010) [arXiv:0908.3909 [hep-th]].

[63] B. Chen and C. S. Chu, "Real-time correlators in Kerr/CFT correspondence," JHEP **1005**, 004 (2010) [arXiv:1001.3208 [hep-th]].

[64] A. Castro and F. Larsen, "Near Extremal Kerr Entropy from AdS2 Quantum Gravity," JHEP **0912**, 037 (2009) [arXiv:0908.1121 [hep-th]].

[65] Y. Matsuo, T. Tsukioka and C. M. Yoo, "Another Realization of Kerr/CFT Correspondence," Nucl. Phys. B **825**, 231 (2010) [arXiv:0907.0303 [hep-th]].

[66] Y. Matsuo, T. Tsukioka and C. M. Yoo, "Yet Another Realization of Kerr/CFT Correspondence," Europhys. Lett. **89**, 60001 (2010) [arXiv:0907.4272 [hep-th]].

[67] J. Rasmussen, "Isometry-preserving boundary conditions in the Kerr/CFT correspondence," Int. J. Mod. Phys. A **25**, 1597 (2010) [arXiv:0908.0184 [hep-th]].

[68] M. Guica and A. Strominger, "Microscopic Realization of the Kerr/CFT Correspondence,"JHEP **1102**, 010 (2011) [arXiv:1009.5039 [hep-th]].

[69] G. Compere, W. Song and A. Virmani, "Microscopics of Extremal Kerr from Spinning M5 Branes," [arXiv:1010.0685 [hep-th]].

[70] A. Castro, A. Maloney and A. Strominger, "Hidden Conformal Symmetry of the Kerr Black Hole," arXiv:1004.0996 [hep-th].

[71] Work in progress.